

Dạng 4: Áp dụng tính chất của các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24$ hay $\cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

Do đó $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b) Ta có $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0) \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Ta lại có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$ b) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = 0$

Lời giải

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

$$= \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin \alpha \cos \alpha.$$

b) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{\tan \alpha \cot \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha \cot \alpha - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$

$$= \frac{\tan \alpha (\cot \alpha + 1)}{\tan \alpha (\cot \alpha - 1)} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha + 1}{\cot \alpha - 1} - \frac{1 + \cot \alpha}{\cot \alpha - 1} = 0.$$

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) \quad \text{b) } \left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \sin(3\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha + 2\pi) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{b) Ta có: } \tan(-\alpha + 11\pi) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$\text{Suy ra } \left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 1.$$

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức sau đây:

$$\text{a) } A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ \text{ (17 số hạng).}$$

$$\text{b) } B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ \text{ (35 số hạng).}$$

Lời giải

$$\text{a) Vận dụng: } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \text{ ta có: } \sin 85^\circ = \cos 5^\circ, \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \dots, \sin 50^\circ = \cos 40^\circ.$$

$$\text{Vậy } A = (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + \dots + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + \sin^2 45^\circ$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{8 \text{ số } 1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

$$\text{b) Vận dụng: } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \text{ ta có: } \cos 175^\circ = -\cos 5^\circ, \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$$

$$\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ, \dots, \cos 95^\circ = -\cos 85^\circ$$

$$\text{Vậy } B = (\cos 5^\circ + \cos 175^\circ) + (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + \dots + (\cos 85^\circ + \cos 95^\circ) + \cos 90^\circ$$

$$= \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{17 \text{ số } 0} + \cos 90^\circ = 0.$$

Bài tập 5: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\text{a) } \cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$$

$$\text{b) } \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$$

$$c) \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$$

$$d) \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2 \Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ (đúng).

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x (\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP.$$

c) Ta có $VT = \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP.$$

d) $VT = \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)}$

$$= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2}$$

$$= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP.$$

Bài tập 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2\cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1)\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x} \\ &= \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1} = \sqrt{(2\cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2\sin^2 x + 1)^2} \\ &= 2\cos^2 x + 1 + 2\sin^2 x + 1 = 3 \end{aligned}$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ta được:

A. $\cos \alpha$.

B. $\sin \alpha$.

C. $-\cos \alpha$.

D. $-\sin \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Câu 2: Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 3

Lời giải

$$\text{Ta có } S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ = 3 - 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 3: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{-3}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

- Câu 4:** Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \alpha}{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$ là
- A.** $\frac{5}{26}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{26}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$P = \frac{\sin \alpha}{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha} = \frac{\tan^3 \alpha + \tan \alpha}{2 \tan^3 \alpha + 8} = \frac{5}{26}$$

- Câu 5:** Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A.** $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$. **B.** $M = 1 - 3 \sin^2 x$.
C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x$. **D.** $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

- Câu 6:** Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

- A.** $M = \tan^2 x$. **B.** $M = \sin^2 x$. **C.** $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$. **D.** $M = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$$

- Câu 7:** Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

- A.** $M = \cot^2 x$. **B.** $M = \cos^2 x$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$$

- Câu 8:** Rút gọn biểu thức $M = (1 \sin^2 x) \cot^2 x + (1 \cot^2 x)$.

- A.** $M = \sin^2 x$. **B.** $M = \cos^2 x$. **C.** $M = \sin^2 x$. **D.** $M = \cos^2 x$.

Lời giải

$$\text{Ta biến đổi: } M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

- Câu 9:** Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

- A.** $M = 1 + \sin^2 \alpha$. **B.** $M = \sin \alpha$. **C.** $M = 2 \sin \alpha$. **D.** $M = 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$= -\sin^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3.$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2).$

A. $M = -4.$

B. $M = -2.$

C. $M = 2.$

D. $M = 4.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) \\ &= (-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 11: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}.$

A. $P = 1 + 2\tan^2 \alpha.$

B. $P = 1 - 2\tan^2 \alpha.$

C. $P = -1 + 2\tan^2 \alpha.$

D. $P = -1 - 2\tan^2 \alpha.$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2\tan^2 \alpha.$$

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$

A. $P = -\frac{2\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$

B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$

C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}.$

D. $P = 0.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Câu 13: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha.$

A. $P = \tan^2 \alpha.$

B. $P = 1.$

C. $P = -\cos^2 \alpha.$

D. $P = \cot^2 \alpha.$

Lời giải

$$P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$$

Câu 14: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}.$

A. $P = \cos x + \sin x.$

B. $P = \cos x - \sin x.$

C. $P = \cos 2x - \sin 2x.$

D. $P = \cos 2x + \sin 2x.$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

$$P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Câu 15: Đơn giản biểu thức

A. $P = 2 \tan^2 \alpha.$

B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}.$

C. $P = 2 \cot^2 \alpha.$

D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1.$$

Câu 16: Đơn giản biểu thức

A. $P = 2.$

B. $P = 1 + \tan \alpha.$

C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} &= \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha. \\ \text{Suy ra } P &= \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right).$$

Câu 17: Đơn giản biểu thức

A. $P = 2.$

B. $P = 2 \cos \alpha.$

C. $P = 2 \tan \alpha.$

D. $P = 2 \sin \alpha.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}.$$

Câu 18: Đơn giản biểu thức

A. $P = 1.$

B. $P = -1.$

C. $P = \frac{1}{2}.$

D. $P = -\frac{1}{2}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$$

Và $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x$. Suy ra $P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1$.

Câu 19: Tính $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$

- A. $\frac{19}{2}$. B. 8. C. $\frac{17}{2}$. D. 9.

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ \\ &= (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + \dots (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ) + \sin^2 45^\circ = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Câu 20: Với mọi góc α , biểu thức $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng

- A. 10 B. -10 C. 1 D. 0

Lời giải

Có 10 số hạng, chia thành 5 cặp.

$$\text{Có } \alpha + \frac{9\pi}{5} = \pi + \left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) \Rightarrow \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\text{Tương tự } \cos\left(\alpha + \frac{8\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right);$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right) = -\cos \alpha. \text{ Do đó } P = 0$$

Câu 21: Biết $\tan x = 2$, giá trị của biểu thức $M = \frac{3\sin x - 2\cos x}{5\cos x + 7\sin x}$ bằng:

- A. $\frac{4}{9}$. B. $-\frac{4}{9}$. C. $\frac{4}{19}$. D. $-\frac{4}{19}$.

Lời giải

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của M cho $\cos x$ ta có: $M = \frac{3\frac{\sin x}{\cos x} - 2}{5 + 7\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{3.2 - 2}{5 + 7.2} = \frac{4}{19}$.

Cách 2: Ta có: $\tan x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Leftrightarrow \sin x = 2\cos x$ thay $\sin x = 2\cos x$ vào M :

$$M = \frac{3.2\cos x - 2\cos x}{5\cos x + 7.2\cos x} = \frac{4\cos x}{19\cos x} = \frac{4}{19}.$$

Câu 22: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

A. $-\frac{2}{\cos \alpha}$.

B. $\frac{2}{\cos \alpha}$.

C. $\frac{2}{\sin \alpha}$.

D. $-\frac{2}{\sin \alpha}$.

Lời giải

Đặt $A = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

Khi đó $A^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} + \frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha} + 2 = \frac{4}{1-\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\cos^2 \alpha}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$ do đó $A = \frac{2}{\cos \alpha}$.

Câu 23: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

A. $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$.

B. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{10}-2}{9}$.

C. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$.

D. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \beta > 0 \end{cases}$.

Ta có $\cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\sin \beta = \sqrt{1-\cos^2 \beta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$.

Vậy $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$.

Câu 24: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

A. $-\tan \alpha$.

B. $\cot \alpha$.

C. $\tan \alpha$.

D. $-\cot \alpha$.

Lời giải

Ta có $\tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

$5\cos \alpha + 12\sin \alpha = 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5\cos \alpha + 12\sin \alpha = 0 \\ 3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$.

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 4\sin x \cos x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

Suy ra $M = 2$.

Câu 26: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A.** $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. **B.** $A = 2 \sin \alpha$. **C.** $A = \sin \alpha \cos \alpha$. **D.** $A = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0.$$

Câu 27: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(\pi - x)$ ta được

- A.** $S = 0$. **B.** $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. **C.** $S = 2 \sin x \cos x$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x) \\ &= \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

Câu 28: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** $P + Q = 0$. **B.** $P + Q = -1$. **C.** $P + Q = 1$. **D.** $P + Q = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Và } Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Khi đó } P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0.$$

Câu 29: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x) \right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $\frac{2}{\sin^2 x}$. **D.** $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \tan \frac{17\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ và } \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \cot x.$$

$$\text{Và } \cot \frac{13\pi}{4} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1; \cot(7\pi - x) = -\cot x.$$

$$\text{Suy ra } P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2 \cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\tan x = -2$. Tính được các biểu thức $A_1 = \frac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x}$, $A_2 = \frac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$, khi đó:

a) $\cot x = -\frac{1}{2}$

b) Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$

c) $A_1 = -\frac{21}{11}$

d) $A_2 = \frac{3}{7}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$

b) Sai: Ta có $\tan x = -2$ nên $\cos x \neq 0$

c) Đúng: $A_1 = \frac{-\frac{5}{2} + 4 \cdot (-2)}{-\frac{5}{2} - 4 \cdot (-2)} = -\frac{21}{11}$

d) Sai: Chia tử và mẫu của biểu thức A_2 cho $\cos x$, ta được:

$$A_2 = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{3\sin x}{\cos x}} = \frac{2\tan x + 1}{1 - 3\tan x} = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{1 - 3 \cdot (-2)} = -\frac{3}{7}$$

Câu 2: Cho $\cot x = 2$. Tính được các biểu thức $B_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$, $B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$, khi đó:

a) Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.

b) $B_1 = -8$

c) $B_2 = -5$

d) $B_1 + B_2 = -13$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$

b) Đúng: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_1 cho $\sin x$, ta được:

$$B_1 = \frac{2\frac{\sin x}{\sin x} + 3\frac{\cos x}{\sin x}}{3\frac{\sin x}{\sin x} - 2\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 + 3\cot x}{3 - 2\cot x} = \frac{2 + 3 \cdot 2}{3 - 2 \cdot 2} = -8$$

c) Sai: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_2 cho $\sin^2 x$, ta được:

$$B_2 = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}} = \frac{2(1 + \cot^2 x)}{\cot^2 x - \cot x} = \frac{2(1 + 2^2)}{2^2 - 2} = 5$$

d) Sai: $B_1 + B_2 = -8 + 5 = -3$

Câu 3: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị $\sin$ của góc lượng giác α âm.

b) Giá trị $\tan$ của góc lượng giác α dương.

c) Giá trị của biểu thức $P = \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = \frac{2}{25}$.

d) Giá trị của biểu thức $Q = \tan \alpha + \cot \alpha > 2$.

Lời giải

a) Sai: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$

b) Đúng: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0$

c) Vì $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{18}{25} = -\frac{2}{25}$.

d) Đúng: $Q = \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} > 2$

Câu 4: Cho $\tan \alpha = 2$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

b) Khi $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha} = \frac{5}{31}$

d) Cho $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức: $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{a^3 + b^3}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$.

b) Sai: Ta có: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$;

Mà $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{c) Đúng: } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{2(4+1) - (4+1)}{8+3+2 \cdot 2(4+1)} = \frac{5}{31}.$$

$$\text{d) Sai: Đặt } \cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}.$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cot \alpha = -3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin \alpha > 0$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{10}{21}$

d) $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$

Lời giải

a) Sai: Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

b) Đúng: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$

Từ hệ thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, suy ra $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

c) Đúng: $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{10}{21}$. Xét biểu thức $P = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha}$

Chia cả tử và mẫu cho $\sin^3 \alpha$ ta được:

$$P = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + 3 + 2 \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}} = \frac{\cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)}{\cot^3 \alpha + 3 + 2 \cdot \cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha)}$$

Thay $\cot \alpha = -3$ vào P ta được $P = \frac{10}{21}$.

d) Đúng: $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot (7\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

Suy ra $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2$
 $= (1 + \cot \alpha)^2 + (1 - \cot \alpha)^2 = 2 + 2 \cot^2 \alpha = 2 + 2 \cdot (-3)^2 = 20$.

Do đó, mệnh đề $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \\ &= \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + 3\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2\cos \alpha = 1$. Tính $P = 2\tan \alpha - \cot \alpha$.

Lời giải

Với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha - 2\cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2\cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha < 0$) $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$

$$\text{và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}.$$

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{6} \approx 0,17$

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14. \end{aligned}$$

Câu 4: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \tan \alpha < 0 \text{ nên } \tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}.$$

$$\text{Thay } \tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \text{ vào } P \text{ ta được } P = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5} \approx -2,24$$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

$$\text{A. } P = \frac{91}{125}. \quad \text{B. } P = \frac{49}{25}. \quad \text{C. } P = \frac{7}{5}. \quad \text{D. } P = \frac{1}{9}.$$

Lời giải

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}.$$

$$\text{Vì } \sin \alpha + \cos \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125} \approx 0,73$$

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha}{5\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha}$.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2\tan^2 \alpha + 3\tan \alpha + 4}{5\tan^2 \alpha + 6} = \frac{2.2^2 + 3.2 + 4}{5.2^2 + 6} = \frac{9}{13} \approx 0,69$$

Câu 7: Huyện lỵ Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6278km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ - 9^\circ = 14^\circ$.

Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378.14.\pi}{180} \approx 1558(km)$