



## Bài Tập Trả Lời Ngắn

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

**Câu 1:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m$  có nghiệm?

**Lời giải**

**Trả lời:** 3

$\cos x = m$  có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$ . Mà  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$

**Câu 2:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x = m + 1$  có nghiệm

**Lời giải**

**Trả lời:** 3

Vì  $-1 \leq \sin x \leq 1$  nên phương trình  $\sin x = m + 1$  có nghiệm khi:  $-1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$ .

Vậy có 3 giá trị.

**Câu 3:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x - m = 2$  có nghiệm.

**Lời giải**

**Trả lời:** 3

Ta có:  $\cos x - m = 2 \Leftrightarrow \cos x = 2 + m$ .

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:  $-1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$ .

Vậy  $-3 \leq m \leq -1$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 4:** Cho góc lượng giác có số đo  $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Các điểm biểu diễn góc này trên đường tròn lượng giác lập thành một đa giác đều có bao nhiêu đỉnh?

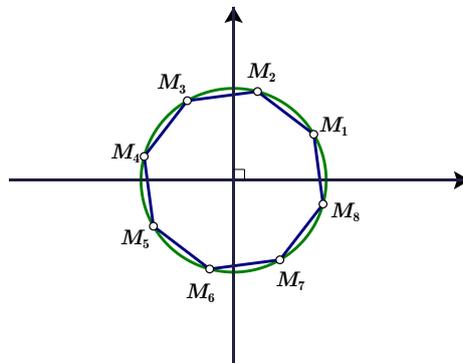
**Lời giải**

**Trả lời:** 8.

Các điểm biểu diễn của góc lượng giác đã cho sai khác nhau một bội nguyên của  $\frac{\pi}{4}$ .

Xét bất phương trình  $0 < \frac{k\pi}{4} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 < k \leq 8$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Suy ra  $k = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ .

Các điểm biểu diễn của góc lượng giác đã cho như hình vẽ bên dưới:



Vậy các điểm biểu diễn góc này trên đường tròn lượng giác lập thành một đa giác đều có 8 đỉnh.

**Câu 5:** Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là:  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây,  $A$  là biên độ dao động và  $x$  là li độ dao động đều được tính bằng centimet,  $\omega > 0$ . Khi đó, chu kỳ  $T$  của dao động là  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Biết giá trị của li độ bằng 9 khi  $t = 2T$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , giá trị biên độ dao động bằng bao nhiêu?

**Lời giải****Trả lời:** 10,4.

Ta có:  $t = 2T = 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega}$ .

Ta có:  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow 9 = A \cos\left(\omega \cdot \frac{4\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = 9 \Leftrightarrow A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{A\sqrt{3}}{2} = 9 \Leftrightarrow A = 6\sqrt{3} \approx 10,4.$$

**Câu 6:** Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình:

$$x_1 = 2 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{cm}); x_2 = 2 \cos(5\pi t) (\text{cm}).$$

Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là?

**Lời giải****Trả lời:** 2,83

$$\text{Xét } x(t) = x_1 + x_2 = 2 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos(5\pi t) = 2\sqrt{2} \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Vậy biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là:  $2\sqrt{2} \approx 2,83$

**Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $2024(\cos^4 x - \sin^4 x) - m + 5 = 0$  có nghiệm?

**Lời giải****Trả lời:** 4049.

$$\text{Ta có: } 2024(\cos^4 x - \sin^4 x) - m + 5 = 0 \Leftrightarrow 2024(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) - m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2024 \cos 2x - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{m-5}{2024}$$

$$\text{Do đó phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m-5}{2024} \leq 1 \Leftrightarrow -2019 \leq m \leq 2029$$

Hơn nữa  $m$  là số nguyên nên  $m \in \{-2019; -2018; \dots; 2028; 2029\}$ .

Vậy có 4049 số nguyên  $m$  thỏa mãn.

**Câu 8:** Sử dụng MTCT để tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cot x = \frac{1}{3}$  với kết quả là radian.

**Lời giải****Trả lời:** -1,9.

$$\text{Ta có: } \cot x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = 3$$

$$\text{Bấm liên tiếp SHIFT tan(3) =}$$

Ta được kết quả gần đúng là  $x \approx 1,249045772\dots$

Suy ra phương trình  $\cot x = \frac{1}{3}$  có tất cả các nghiệm là:  $x \approx 1,249045772\dots + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình tương ứng với  $k = -1$

Trên màn hình MTCT vẫn còn kết quả trên, ta bấm liên tiếp  $-\text{SHIFT } \pi =$

Ta được kết quả gần đúng là  $x \approx -1,892546881\dots$

Làm tròn đến hàng phần mười được kết quả là:  $x \approx -1,9$ .

**Câu 9:** Phương trình  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm trên khoảng  $(0; 2\pi)$

**Lời giải**

**Trả lời: 1**

Ta có:  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do  $x \in (0; 2\pi)$  nên  $0 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{7}{6} \Leftrightarrow k = 1$ .

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 10:** Phương trình  $\sin x(1 + 2\cos x) = 0$  có bao nhiêu nghiệm  $x \in (-\pi; \pi)$

**Lời giải**

**Trả lời: 3**

$$\sin x(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Do  $x \in (-\pi; \pi) \Rightarrow x \in \left\{0, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ . Vậy có 3 giá trị

**Câu 11:** Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây. Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

**Lời giải**

**Trả lời: 19**

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó  $x = 0$ .

Xét phương trình  $3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  ta có:

$$3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, tức là  $0 \leq t \leq 30$  hay  $0 \leq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leq 30$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{360 - 5\pi}{6\pi}.$$

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 17; 18\}$ .

**Câu 12:** Một con lắc lò xo treo thẳng đứng gồm một lò xo nhẹ và một vật nặng khối lượng  $m$ . Từ vị trí cân bằng, kéo vật xuống một đoạn để lò xo giãn rồi buông cho vật dao động. Chọn trục toạ độ  $Ox$  trùng với trục lò xo, gốc toạ độ  $O$  tại vị trí cân bằng, chiều dương hướng xuống dưới, gốc thời gian là lúc vật đi qua vị trí cân bằng lần đầu tiên. Khi đó phương trình dao động của vật là  $x = 5\cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ , với  $x$  là toạ độ của vật nặng,  $t$  là thời gian vật di chuyển. Vào thời gian nào thì vật lần đầu tiên có toạ độ 5 ?

**Lời giải**

**Trả lời: 0,24.**

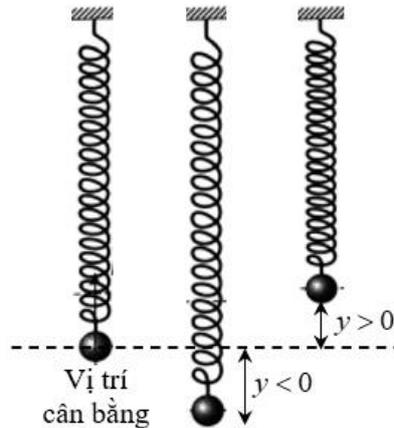
Vật có toạ độ 5 ta có:

$$x = 5 \Leftrightarrow 5 \cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 20t + \frac{\pi}{2} = k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{10}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vì lần đầu tiên vật đạt toạ độ 5 nên  $t = -\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{40} \approx 0,24$  ( $k=1$ ).

**Câu 13:** Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $y = 25\sin 4\pi t$  ở đó  $y$  được tính bằng centimét còn thời gian  $t$  được tính bằng giây. Gọi  $a$  là chu kì dao động của con lắc lò xo;  $b$  là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và  $c$  là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính  $a + b + c$ .



**Lời giải**

**Trả lời:** 52,5.

Hàm số  $y = 25\sin 4\pi t$  tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$  suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo là  $T = \frac{1}{2}$  giây nên  $a = 0,5$ .

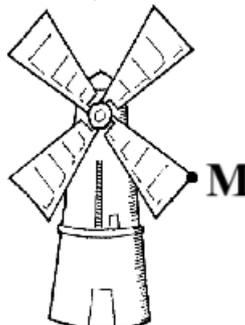
Vì chu kì dao động của con lắc là  $T = \frac{1}{2}$  giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là  $b = f = \frac{1}{T} = 2$  Hz.

Vì phương trình dao động của con lắc là  $y = 25\sin 4\pi t$  nên biên độ dao động của nó là  $A = 25$  cm

Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là  $c = 2A = 50$  cm.

Vậy  $a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$ .

**Câu 14:** Cối xay gió là một loại máy chạy bằng sức gió. Máy này được thiết kế để biến năng lượng gió thành các dạng năng lượng khác hữu dụng hơn. Một điểm M nằm trên cánh của cối xay gió như hình vẽ.



Khi cánh quạt quay, vị trí thấp nhất và cao nhất của M so với mặt đất lần lượt là 8 mét và 22 mét. Xét một vòng quay của M bắt đầu từ vị trí thấp nhất. Khi cánh quay đều, khoảng cách  $h$  từ M đến mặt đất được tính

theo công thức  $h = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) + C$ , với  $x$  là thời gian quay của điểm M ( $x \geq 0$ ). Hỏi sau 4 giây, điểm M cách mặt đất bao nhiêu mét?

### Lời giải

**Trả lời: 12,8**

Vị trí thấp nhất và cao nhất là 8 và 22 nên  $C = \frac{22+8}{2} = 15$  và  $A = 15 - 22 = -7$ .

Phương trình khoảng cách của điểm M so với mặt đất là  $h = -7 \cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) + 15$ .

Khi  $x = 4 \Rightarrow h \approx 12,8(m)$

**Câu 15:** Học sinh An tiến hành làm một thí nghiệm trên một con lắc đơn. Tại vị trí cân bằng, An tác động một lực lên con lắc theo phương ngang. Từ các kết quả thí nghiệm cho thấy, An tính được con lắc dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $s = 2\sqrt{2} \cos\left(7t + \frac{\pi}{3}\right)$  với  $s$  (cm) là độ dài cung quét của con lắc từ một vị trí bất kì tại thời điểm  $t$  đến vị trí cân bằng. Con lắc đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây?

### Lời giải

**Trả lời: 67**

Khi vật đi qua vị trí cân bằng thì  $s = 0$ , ta có:

$$2\sqrt{2} \cos\left(7t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(7t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 7t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 7t = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{42} + \frac{k\pi}{7}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây, ta có:

$$0 \leq \frac{\pi}{42} + \frac{k\pi}{7} \leq 30 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{210}{\pi} - \frac{1}{6}$$

Vì  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots; 66\}$ .

Vậy khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 67 lần.